Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur (ou chute libre au voisinage de la Terre)

1. Position du problème:

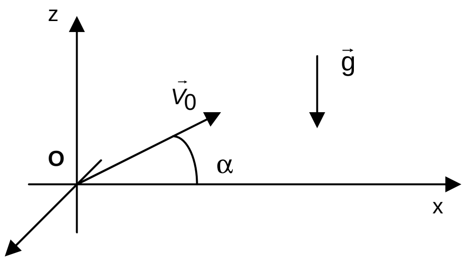
Le système est un objet de masse m:
- il est suffisamment dense pour que l'on puisse négliger la poussée d'Archimède devant le poids du projectile;
- il est de forme aérodynamique afin que l'on puisse négliger la force de frottement de l'air devant le poids.

Le référentiel est le référentiel terrestre, supposé galiléen.

La seule force considérée est donc le poids: $\boxed{\vec{P} = m.\vec{g}}$

La seconde loi de Newton nous permet d'écrire: $\boxed{\vec{P} = m.\vec{a}_G}$

et donc $\boxed{\vec{a}_G = \vec{g}}$



Le projectile est lancé d'un point O avec une vitesse V_0 non nulle dans une direction qui fait un angle α avec l'horizontale.
Le repère d'espace choisi est (O,x,y,z) tel que:
- Oz est un axe vertical ascendant,
- Ox et Oy lui sont perpendiculaires

et le vecteur $\vec{V}_0$ appartient au plan Oxz.

	coordonnée sur x'x	**coordonnée sur y'y**	**coordonnée sur z'z**
vecteur accélération $\vec{a}_G$	$a_{Gx} = 0$	$a_{Gy} = 0$	$a_{Gz} = -g$
vecteur vitesse initial $\vec{V}_0$	$V_{0x} = V_0.\cos\alpha$	$V_{0y} = 0$	$V_{0z} = V_0.\sin\alpha$
position initiale O	$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$z_0 = 0$

2. Détermination du vecteur vitesse:

	coordonnée sur x'x	**coordonnée sur y'y**	**coordonnée sur z'z**
équation	$\frac{dv_x}{dt} = a_{Gx} = 0$	$\frac{dv_y}{dt} = a_{Gy} = 0$	$\frac{dv_z}{dt} = a_{Gz} = -g$
intégration	$v_x(t) = K_1$	$v_y(t) = K_2$	$v_z(t) = -g.t + K_3$
détermination des constantes	$v_x(0) = K_1 = V_{0x}$ donc $K_1 = V_0.\cos\alpha$	$V_y(0) = K_2 = V_{0y}$ donc $K_2 = 0$	$V_z(0) = K_3 = V_{0z}$ Donc $K_3 = V_0.\sin\alpha$
solution	$\mathbf{v_x(t) = V_0.\cos\alpha}$	$\mathbf{v_y(t) = 0}$	$\mathbf{v_z(t) = -g.t + V_0.\sin\alpha}$

3. Equations horaires du mouvement:

	coordonnée sur x'x	**coordonnée sur y'y**	**coordonnée sur z'z**
équation	$\frac{dx}{dt} = v_x(t) = V_0.\cos\alpha$	$\frac{dy}{dt} = v_y(t) = 0$	$\frac{dz}{dt} = v_z(t) = -g.t + V_0.\sin\alpha$
intégration	$x(t) = (V_0.\cos\alpha).t + K'_1$	$y(t) = K'_2$	$z(t) = -\frac{1}{2}\, g.t^2 + (V_0.\sin\alpha).t + K'_3$
détermination des constantes	$x(0) = K'_1 = x_0$ donc $K'_1 = 0$	$y(0) = K'_2 = y_0$ donc $K'_2 = 0$	$z(0) = K'_3 = z_0$ donc $K'_3 = 0$
solution	$\mathbf{x(t) = (V_0.\cos\alpha).t}$	$\mathbf{y(t) = 0}$	$\mathbf{z(t) = -\frac{1}{2}\, g.t^2 + (V_0.\sin\alpha).t}$

commentaires:

	$y(t) = 0$	le mouvement est plan
	$x(t) = (V_0.\cos\alpha).t$	le mouvement est uniforme selon x
	$z(t) = -\frac{1}{2}\, g.t^2 + (V_0.\sin\alpha).t$	le mouvement est identique à celui d'une chute libre verticale à vitesse initiale non nulle

4. Etude de la trajectoire:

On élimine le paramètre temps en considérant les équations horaires x(t) et z(t):

$$t = \frac{x}{v_0.\cos\alpha} \qquad \text{et donc} \qquad z = -\frac{1}{2}\, g.\left(\frac{x}{v_0.\cos\alpha}\right)^2 + (V_0.\sin\alpha).\left(\frac{x}{v_0.\cos\alpha}\right) = -\frac{g}{2.(v_0.\cos\alpha)^2}.x^2 + (\tan\alpha).x$$

c'est l'équation d'une parabole

► **la portée**: distance maximale atteinte par le projectile

$$z = 0 \text{ pour } x = \frac{2.v_0^2.\sin\alpha.\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2.\sin(2\alpha)}{g} = x_{max}$$

- influence de v_0 sur la portée: x_{max} augmente si v_0 augmente
- influence de l'angle de tir sur la portée: x_{max} maximal lorsque α = 45°